Université Hassan II - Mohammedia, Casablanca F.S.T. Mohammedia Département de Mathématiques Filière d'Ingénieur IMIAE Concours d'accès à la première année Epreuve d'Algèbre. Durée : 2 heures. 11 Juillet 2012

On considère l'espace vectoriel  $E=\mathbb{R}^3$  et f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base canonique  $\mathcal{B} = \{\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3\}$  est la matrice A:

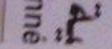
$$A = \left(\begin{array}{rrr} 3 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- I. Calcul des puissances de A.
- 1) Déterminer les valeurs propres  $\lambda_1$  et  $\lambda_2$  de l'endomorphisme f, avec  $\lambda_1 < \lambda_2$ .
- 2) La matrice A est-elle inversible? (On ne demande pas le calcul de la matrice  $A^{-1}$ ).
- Déterminer une base et la dimension de chacun des sous-espaces propres de f.
- Justifier que f n'est pas diagonalisable.
- 5) Déterminer le vecteur \$\vec{u}\_1\$ de \$E\$ vérifiant :
- *u* <sub>1</sub> est un vecteur propre de f associé à la valeur propre λ<sub>1</sub>.
- . La première composante de  $\overrightarrow{u}_1$  est 1.
- 6) Déterminer le vecteur  $\vec{u}_2$  de E vérifiant :
- .  $\vec{u}_2$  est un vecteur propre de f associé à la valeur propre  $\lambda_2$ .
- . La deuxième composante de  $\vec{u}_2$  est 1.
- 7) Soit  $\vec{u}_3 = (1, 1, 1)$ . Montrer que  $\mathcal{F} = \{\vec{u}_1, \vec{u}_2, \vec{u}_3\}$  est une base de E.
- 8) Déterminer la matrice de passage P de la base B dans la base F puis la matrice de passage de la base  $\mathcal{F}$  dans la base  $\mathcal{B}$ .
- 9) Montrer que :  $f(\overrightarrow{u}_3) = \overrightarrow{u}_2 + 2\overrightarrow{u}_3$ .
- 10) En déduire que la matrice de f dans la base F est la matrice :

$$T = \left(\begin{array}{ccc} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

- 11) Rappeler la relation matricielle entre A et T.
- 12) Prouver que pour tout élément n de N°, il existe un réel αn tel que :

$$T^{n} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{n} & \alpha_{n} \\ 0 & 0 & 2^{n} \end{pmatrix}$$



On donnera le réel au ainsi qu'une relation entre ann et an

13) Montrer que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ \alpha_n = n2^{n-1}$$

En déduire l'écriture matricielle de A" en fonction de n.

## II. Matrices commutant avec A.

 $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  désignant l'ensemble des matrices carrées d'ordre 3, on considère le sous-ensemble  $\mathcal{C}(\mathcal{A})$  de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  des matrices M telles que :

$$AM = MA$$

- Montrer que C(A) est un sous-espace vectoriel de M<sub>3</sub>(R)
- 2) Pour M appartenant à  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ , on pose  $M' = P^{-1}MP$ . Montrer que :

$$AM = MA \iff TM' = M'T$$

(T est définie dans la question I. 10).

- 3) Montrer qu'une matrice M' de  $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$  vérifie TM' = M'T si et seulement si M' est de la forme  $\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$  où a,b,c sont trois réels.
- 4) En déduire que M appartient à C(A) si et seulement s'il existe des réels a,b,c tels que :

$$M = \begin{pmatrix} -a+2b & 2a-2b & -a+b+2c \\ -a+b & 2a-b & -a+b+c \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix}$$

Déterminer alors une base de C(A) ainsi que la dimension de C(A).